

# MODEL LUKU S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI

## SDOF MODEL OF A BOW

Petr Frantík<sup>1</sup>

### Abstrakt

Příspěvek je věnován odvození modelu luku s jedním stupněm volnosti včetně aproximace funkce napětí pružiny nahrazující ohýbané lučiště. Lučiště je zde uvažováno jako prizmatický prut z lineárně se chovajícího materiálu. Odvození modelu luku je provedeno s uvážením geometrické nelinearity.

### Klíčová slova

luk, model s jedním stupněm volnosti, geometrická nelinearita, vzpěr prutu

### Abstract

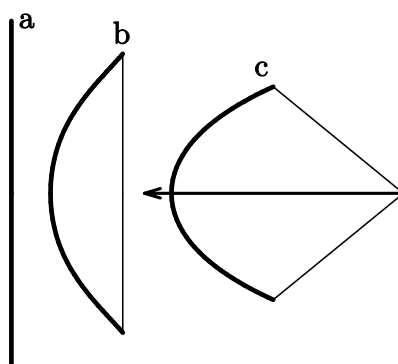
The paper is focused on derivation of a model of a bow with single degree of freedom including an approximation of a stress function of a spring which represents bended limbs. The bow is considered here as straight with prismatic limbs of linear material. In the derivation of the model of the bow the geometrical nonlinearity is assumed.

### Keywords

bow, single-degree-of-freedom model, geometrical nonlinearity, beam buckling

## 1 Úvod

Luk je nejvýznamější projektilovou zbraní lidské historie, viz [1]. Lučiště, na které se napíná tětíva, slouží jako zásobník potenciální energie, která je po vypuštění šípu transformována do kinetické energie šípu, viz obr. 1.



Obr. 1: Jednoduchý luk a jeho tři stavy: a) lučiště s nenapnutou tětívou, b) s napnutou tětívou a c) natažený luk se založeným šípem před vypuštěním.

<sup>1</sup> Ing. Petr Frantík, Ph.D., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, Veveří 331/95, 602 00 Brno, ČR, e-mail: kitnarf@centrum.cz

Na obr. 1 jsou znázorněny tři stavy luku. První, označený jako a) odpovídá volnému lučisti bez tětivy. Stav b) je luk s napnutou tětivou (bez nátahu) a stav c) odpovídá luku při nátahu se založeným šípem.

Efektivita luku je ovlivněna mnoha faktory. Tětiva by měla být co nejtužší a nejlehčí, aby nepojmala mnoho energie z nátahu. Lučisti by mělo být pružné se schopností rychle a opakovaně vydat akumulovanou energii. Jeho tvar značně ovlivňuje průběh náťahové síly, kterou lučistiník táhne tětivu v místě náťahového bodu se založeným šípem.

Lučisti je při napnutí tětivy v postkritickém stavu, který lze pro prizmatický prut popsat pomocí úplných eliptických integrálů  $E$  a  $K$ , viz [2]:

$$\begin{aligned} N(\kappa) &= 4K^2(\kappa) \frac{EI}{L^2}, \\ w &= \frac{\kappa L}{K(\kappa)}, \\ u &= 2L \left( 1 - \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} \right), \\ \kappa &= \sin \frac{\theta_0}{2}, \end{aligned} \tag{1}$$

kde  $N$  je vzpěrná síla,  $EI$  ohybová tuhost prutu délky  $L$ ,  $w$  je vzepětí prutu (průhyb uprostřed rozpětí),  $u$  je sblížení konců prutu a  $\theta_0$  je pootočení konce prutu. Pro eliptické integrály platí:

$$\begin{aligned} K(\kappa) &= \frac{\pi}{2} \left( 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \kappa^2 + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \kappa^4 + \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \kappa^6 + \dots \right), \\ E(\kappa) &= \frac{\pi}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\kappa^2}{1} - \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{\kappa^4}{3} - \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{\kappa^6}{5} - \dots \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Výrazy můžeme aproximovat užitím prvních dvou členů řad, viz [2]:

$$\begin{aligned} u &\approx 4L \left( 1 - \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{NL^2}} \right), \\ w &\approx 2 \sqrt{\frac{8}{\pi^2} \left( 1 - \frac{\pi^2 EI}{NL^2} \right)}. \end{aligned} \tag{3}$$

## 2 Model

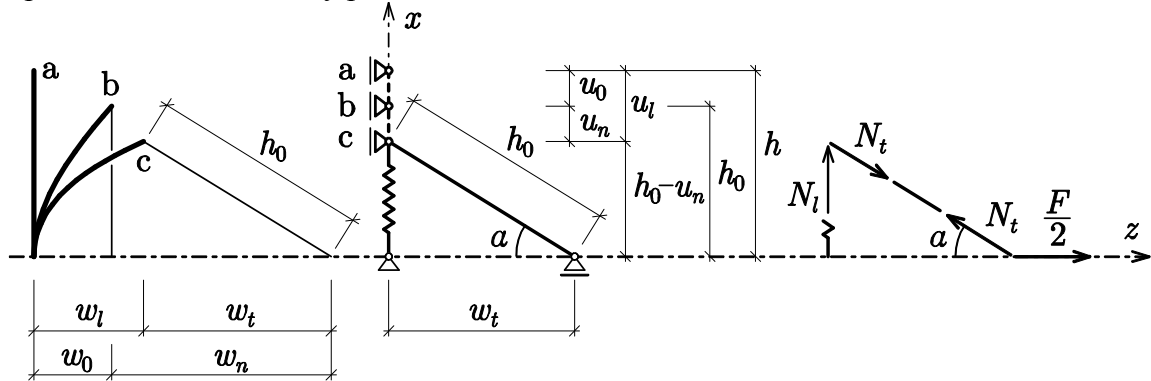
Model luku s jedním stupněm volnosti je tvořen svislou, předpjatou, obecně nelineární pružinou na jejíž pohyblivý konec je upevněna tětiva ve formě dokonale tuhého táhla délky  $h_0 = L_t/2$ , kde  $L_t$  je délka tětivy, viz obr. 2.

Luk se napíná prostřednictvím táhla (poloviny tětivy) silou  $F$ , pro kterou platí:

$$\begin{aligned} \frac{F}{2} &= N_t \cos \alpha = N_t \frac{w_t}{h_0}, \\ N_t &= N_t \sin \alpha = N_t \frac{h_0 - u_n}{h_0}, \end{aligned} \tag{4}$$

kde  $N_t$  je normálová síla v tětivě,  $w_t$  aktuální délka vodorovného průmětu tětivy (vzdálenost napínacího bodu tětivy od spojnice upevňovacích bodů tětivy),  $N_t$  je síla

v náhradní pružině alias svislá složka síly ohýbající lučiště,  $u_n$  je polovina přírůstku přiblížení upevňovacích bodů tětivy při nátahu luku,  $u_l$  je polovina celkového přiblížení upevňovacích bodů tětivy při nátahu.



Obr. 2: Schéma jednostupňového modelu luku a působících sil

Díky geometrii úlohy (obr. 2) dále platí:

$$\begin{aligned} h &= h_0 + u_0, \\ u_l &= u_0 + u_n \\ h_0^2 &= (h_0 - u_n)^2 + w_t^2, \end{aligned} \quad (5)$$

kde  $h = L / 2$  je polovina účinné délky  $L$  lučiště (vzdálenost upevňovacích bodů tětivy při nenapjatém luku),  $u_0$  je přiblížení upevňovacích bodů tětivy vlivem napnutí tětivy (bez nátahu). Využitím výrazů (4,5) dostáváme vztah:

$$F = \frac{2w_t}{\sqrt{h_0^2 - w_t^2}} N_l = \frac{4w_t}{\sqrt{L_t^2 - 4w_t^2}} N_l. \quad (6)$$

## 2.1 Lineární aproximace lučiště

Budeme-li uvažovat nejjednodušší model s lineárním pracovním diagramem daným výrazem:

$$N_l = N_l(u_0) + k(u_n) = N_l(u_0) + k\left(h_0 - \sqrt{h_0^2 - w_t^2}\right) = N_l(u_0) + \frac{k}{2}\left(L_t - \sqrt{L_t^2 - 4w_t^2}\right), \quad (7)$$

kde  $k$  je tuhost náhradní lineární pružiny, dostaneme:

$$\begin{aligned} F_{\text{linear}}(w_t) &= \frac{2w_t}{\sqrt{h_0^2 - w_t^2}} \left( N_l(u_0) + k\left(h_0 - \sqrt{h_0^2 - w_t^2}\right) \right) = \\ &= \frac{4w_t}{\sqrt{L_t^2 - 4w_t^2}} \left( N_l(u_0) + \frac{k}{2}\left(L_t - \sqrt{L_t^2 - 4w_t^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Pro odhad síly  $N_l$  a tuhosti náhradní pružiny můžeme v prvním přiblížení užít aproximativní výrazy (3), ze kterých vyplývají závislosti:

$$\begin{aligned} N_l(u) &= \frac{4\pi^2 EI}{(2L - u)^2}, \\ N_l(u_0) &= \frac{4\pi^2 EI}{(2L - u)^2} = \frac{16\pi^2 EI}{(3L + L_t)^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Provedeme derivaci funkce  $N(u)$  podle  $u$ :

$$k \approx \left. \frac{\partial N_l}{\partial u} \right|_{u=u_0} = \frac{8\pi^2 EI}{(2L - u_0)^3} = \frac{64\pi^2 EI}{(3L + L_t)^3}, \quad (10)$$

díky které získá aproximace síly  $N_l$  tvar:

$$N_l(w_t) = \frac{16\pi^2 EI}{(3L + L_t)^2} \left( 1 + \frac{3}{3L + L_t} \left( L_t - \sqrt{L_t^2 - 4w_t^2} \right) \right). \quad (11)$$

Výraz (9) pak můžeme dosazením této tuhosti upravit na:

$$F(w_t) = \frac{64w_t}{\sqrt{L_t^2 - 4w_t^2}} \frac{\pi^2 EI}{(3L + L_t)^2} \left( 1 + \frac{3}{3L + L_t} \left( L_t - \sqrt{L_t^2 - 4w_t^2} \right) \right). \quad (12)$$

## 2.2 Nelineární aproximace lučičtě

Nelineární aproximace lučičtě spočívá v přímém užití výrazu (10):

$$N_l(u_l) = \frac{4\pi^2 EI}{(2L - u_l)^2}, \quad (13)$$

přičemž dle (5) užijeme:

$$u_l = u_0 + h_0 - \sqrt{h_0^2 - w_t^2} = \frac{1}{2} \left( L - \sqrt{L_t^2 - 4w_t^2} \right), \quad (14)$$

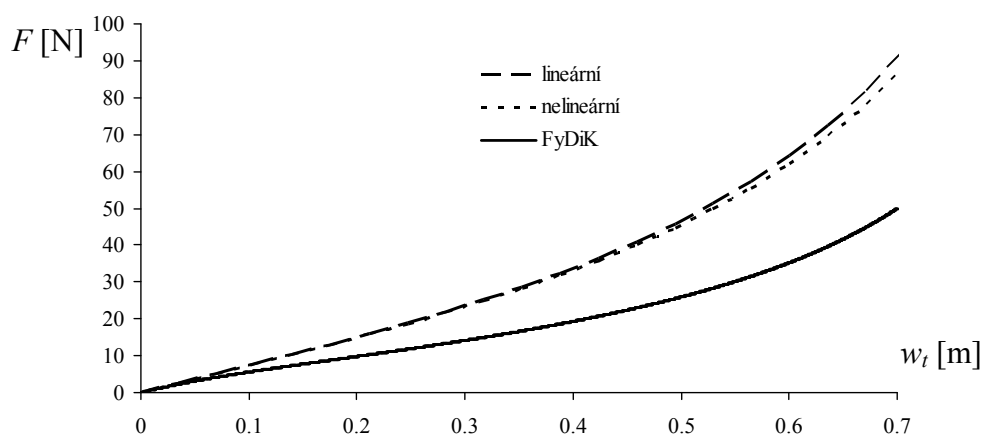
což po úpravě dá výrazy:

$$N_l(w_t) = \frac{16\pi^2 EI}{\left( 3L + \sqrt{L_t^2 - 4w_t^2} \right)^2}. \quad (15)$$

$$F(w_t) = \frac{64w_t}{\sqrt{L_t^2 - 4w_t^2}} \frac{\pi^2 EI}{\left( 3L + \sqrt{L_t^2 - 4w_t^2} \right)^2}.$$

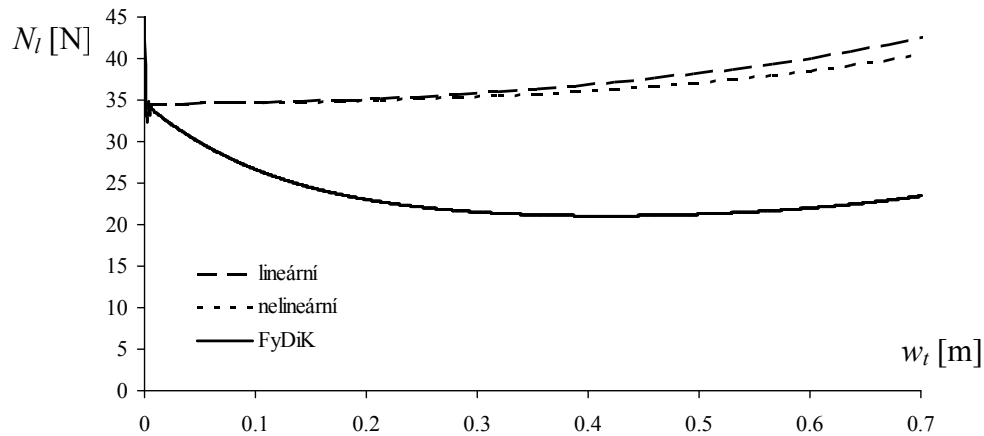
## 3 Srovnání

Na obr. 3 je vidět graf srovnání odvozených závislostí aproximujících luk tvořený lučičtěl z jasanu délky 2 m, s obdélníkovým průřezem  $30 \times 7$  mm a modulem pružnosti  $E = 16$  GPa (viz [3]).



Obr. 3: Průběh nátažové síly  $F$  v závislosti na délce  $w_t$  průmětu tětiny do vodorovné osy

Z grafického srovnání vyplývá výrazný rozdíl oproti výsledku numerické simulace pomocí prutového modelu FyDiK2D, viz [4]. Důvodem je zřejmě především vliv ohybových momentů od vodorovné složky normálové síly v těživě, které nebyly v odvození vzaty do úvahy. Efekt zanedbání je patrný především na průběhu síly  $N_l$ , viz graf obr. 4. Vlivem pootočení tětivy dochází k výraznému přerozdělení ohybové deformace lučiště, vedoucí k výraznému snížení svislé složky normálové síly v tětivě.



Obr. 4: Průběh svislé složky  $N_l$  normálové síly v tětivě v závislosti na délce  $w_t$  průmětu tětivy do vodorovné osy

#### 4 Závěr

V článku byl popsán jednostupňový model luku včetně odvození potřebných výrazů. Dále byly odvozeny dvě aproximace svislé složky síly v tětivě. Grafické srovnání získaných závislostí s výsledkem numerické simulace ovšem ukázalo nutnost zahrnout do modelu přerozdělení ohybových deformací lučiště vlivem změny směru tětivy.

#### Poděkování

Výsledek byl vytvořen za finanční podpory v rámci projektu reg. č. FAST-S-16-3803.

#### Literatura

- [1] ADAM, L. *Luk u Mongolů, historie a reflexe ve folklóru*. Bakalářská práce. Filosofická fakulta Univerzity Karlovy, Praha 2009.
- [2] RŽANICYN, J. *Ustojčivost' ravnovesija uprugich system*, Gosudarstvennoje izdatel'stvo techniko-teoretičeskoj literatury, Moskva 1955.
- [3] LEHKÝ, D., FRANTÍK, P. Dynamický experiment na sadě dřevěných konzolových nosníků. Konference *70 rokov SvF STU*, Bratislava 2008.
- [4] FRANTÍK, P. Diskrétní model FyDiK2D. Mezinárodní konference *Modelování v mechanice 2009*, VŠB–TU Ostrava 2009.